

Dynamisk Kalibrering

Anders F. Kronborg, Christian S. Kastrup og Peter P. Stephensen, MAKRO/DREAM*

18. september 2018

1 Indledning

Parametrene i en makroøkonomisk model kan grundlæggende opdeles i to grupper: *adfærdsparametre* og *niveauparametre*. Gode eksempler på adfærdsparametre er substitutionselasticiteter i produktions- og nyttefunktioner, arbejdsudbudselasticiteter, elasticiteter i udenrigshandelen osv. Disse parametre skal helst bestemmes ved økonometrisk analyse idet de er helt centrale for hvorledes modellen reagerer ved stød.

Niveau-parametrenes rolle er at sikre at modellens niveauer i basisåret er i overensstemmelse med data. Eksempler på denne parametertype er fordelingsparametrene i en CES-funktion og niveau-parametrene i eksportefterspørgslen. Disse parameters indflydelse på hvorledes modellen reagerer ved stød må forventes at være betydeligt mindre end for adfærdsparametre. De tillægges derfor typisk mindre vægt og man tillader sig derfor som regel at *kalibrere* disse parametre i stedet for at benytte egentlige økonometriske teknikker. En sådan fremgangsmåde kan sandsynligvis forsvares i en statisk model, idet niveau-parametrene i en sådan model muliggør at økonomies struktur kan beskrives på et relativt detaljeret niveau (dette kendes fx fra multisektormodellen REFORM). I en dynamisk model er klassisk kalibrering imidlertid mere problematisk. Problemet er at klassisk kalibrering indebærer at økonomiens struktur så at sige »størkner« i modellens basis-år. Som følge af dette bliver modellen en beskrivelse af et hypotetisk system med fastholdt struktur. Der ses derved bort fra mange centrale strukturelle tendenser så som voksende service-sektor, at udenlandsk efterspørgsel vokser hurtigere end indland, faldende investeringspriser osv.

I de følgende to afsnit gives eksempler på metoder MAKRO-gruppen har udviklet til at tage højde for de strukturelle skift i økonomien. Udgangspunktet er at behandle serierne af kalibrerede parametre som »data«, idet standard økonometriske metoder anvendes til at undersøge, hvorvidt serierne er karakteriseret af trends, andre strukturelle skift eller persistente fluktuationer omkring et konstant niveau, etc. Dette er beskrevet i afsnit 2. Man kan desuden tænke på kalibreringsproceduren som observationsligningen i en state-space repræsentation, og dermed kan Kalman-filtret anvendes. I nogle af modellens relationer - f.eks. i faktorefterspørgslen - er det dermed muligt, simultant, at undersøge parameterens tilpasning til det strukturelle niveau samt at give et estimat på

*E-mail: ank@dreammodel.dk

en tidsinvariant adfærdsparameter (som f.eks. en CES substitutionselasticitet). Dette er beskrevet i afsnit 3.

2 Strukturelle skift og ikke-modelleret persistens

I den nuværende version af MAKRO findes flere hundrede niveauparametre. Hver gang modellen opdateres skal disse parametre fastlægges. Dette skal gøres på en måde så ny information inddrages løbende uden at dette giver anledning til store skift i modellens funktionsmåde. Én mulighed er, at »lægge parametrene flade« efter basisåret, så den seneste værdi bruges i fremskrivningen. Dette svarer til den klassiske kalibrering nævnt ovenfor. En anden mulighed ville være at benytte det historiske gennemsnit til prognosen. Brugen af sådanne regler kan dog være problematiske, henholdsvis hvis basisåret har været tilstrækkeligt usædvanligt eller hvis der er trends. Rent modelmæssigt er MAKRO som nævnt karakteriseret ved, at en række strukturelle skift i økonomien bliver beskrevet i udvikling i diverse niveau-parametre: Det kunne eksempelvis være skill-biased teknologiske fremskridt, voksende beskæftigelse i servicesektoren eller en tiltagende tendens til at købe udenlandske varer en input i produktionen. Foruden den underlæggende strukturelle process afspejler parametrene nødvendigvis den støj, der er i data, og som vi ønsker at se bort fra i fremskrivningen. Figur 1 og 2 viser et uddrag af disse parametre i den aktuelle modelversion.

Et relativt simpelt eksempel på en niveau-parameter findes i CES-efterspørgslen:

$$x_{jt} = \mu_{jt} \left(\frac{p_{jt}}{P_t} \right)^{-E} X_t \quad (1)$$

Her er x_t , X_t , p_t og P_t observeret historisk data, mens E er en tidsinvariant parameter (E er et typisk eksempel på en adfærdsparameter). Fordelingsparameteren μ_t er uobserveret, men for en given værdi af E kan vi kalibrere μ_t på et hvert tidspunkt og får derved en historisk tidsrække:

$$\mu_{jt} = \frac{x_{jt}}{X_t} \left(\frac{p_{jt}}{P_t} \right)^E$$

Ideen er nu at anvende standard økonometriske metoder til at undersøge, hvorvidt disse tidsrækker er karakteriseret af trends, andre strukturelle skift eller persistente fluktuationer omkring et konstant niveau, etc.

Motiveret af ovenstående diskussion ønsker vi at betragte parametrene som de facto tidsrækker (hvilket gælder for en given parametrisering af de øvrige parametre og modelversionen). Dermed kan man ved hjælp af standard økonometriske metoder finde den proces, der bedst beskriver den historiske udvikling. Som udgangspunktet for denne analyse benyttes den automatiserede procedure, der er beskrevet i Hyndman and Khandakar [2008], til at vælge den bedste ARIMA-model, bl.a. baseret på informationskriteriet. Efterfølgende kan den valgte ARIMA-proces bruges til fremskrivning af parameteren (en lignende øvelse anvendes for fremskrivning af arbejdskraftefterspørgsel i Iversen, Stephensen & Hansen (2016)).

Det er selvsagt interessant at undersøge, hvorvidt denne anvendelse af ARIMA-modeller ville have givet en bedre fremskrivning af MAKROs parametre, end typiske

Tabel 1: Rullende forecast-fejl for 2000-2016, ARIMA vs. tommelfingerregler

RMSE \ År	1	3	5	10
ARIMA	0,97	0,96	0,93	0,83
3-års glidende gennemsnit	1,30	1,14	1,13	1,05
5-års glidende gennemsnit	1,59	1,30	1,23	1,10

Anm.: RMSE relativt til en Random Walk (flad fremskrivning af niveauparametre)

tommenfingerregler. I Tabel 1 opsummeres resultaterne fra en pseudo out-of-sample fremskrivningsøvelse, hvor de forskellige modellers fremskrivning sammenlignes med de senere realiserede værdier af parametrene. Sammenligningen er foretaget som en rullende estimation fra 1968 samt en fremskrivning for årene 1990-2016, baseret på MAKROs parametre. Fremskrivningerne fra ARIMA-modellerne sammenlignes med tre forskellige tommelfingerregler: En Random Walk (RW)-fremskrivning (parametrene lægges flade fra seneste kalibreringsår) samt henholdsvis et 3- og 5-års glidende gennemsnit. Alle resultaterne i Tabel 1 vises relativt til RW og som et uvægtet geometrisk gennemsnit. Resultaterne er umiddelbart tilfredsstillende med tanke på, at RW for mange tidsserier er en relativt god fremskrivning, særligt på kort sigt. Såfremt der flere af serierne, som indeholder strukturelle brud vil dette tendere at favorisere en RW antagelse (vi forsøger at tage højde for dette i den faktiske implementering, men det er ikke afspejlet i Tabel 1). Størrelsen på forecastfejlene for ARIMA og RW bliver desuden presset sammen at et stort antal serier, hvor den valgte proces er netop en RW. Resultaterne for den længere forecast-horisont indikerer, at ARIMA'ernes evne til at identificere trends forbedrer fremskrivningen. Omvendt ser både 3- og 5-års glidende gennemsnit ud til at klare sig betydeligt dårligere end de to alternativer. Dette tyder på, at støjen i serierne ikke er dominerende ligesom gennemsnittene ikke tager højde for eventuelle trends. Lignende resultater findes i Danmarks Nationalbank [2003]: J-led fra kvartalet før fører til en lavere bias end gennemsnittet af de fire foregående kvartaler og begge er markant bedre end J-led på nul. Her konkluderes det, at justeringsled er nødvendige fordi modellen ikke afspejler den sande datagenererende proces og på grund af strukturelle skift i økonomien (se også Hendry and Clements [2003]). Vi arbejder i MAKRO med at implementere en række forsigtighedsprincipper, f.eks. med hensyn til identifikation af strukturelle brud i realtid og i forhold til en mere forsigtig fremskrivning af trends¹, samt at kombinere ARIMA'erne med andre modeller, hvilket er kendt for at øge forecast-præcisionen (Timmermann [2006]). Et eksempel herpå kunne være *eksponential smoothing*, (Hyndman [2015] og anvendt i Iversen et al. [2016]). Endeligt vil der være brug for at kunne udvælge nogle parametre som modelbrugeren ønsker at håndholde eller som restringeres i forhold til hinanden, hvilket der ikke skelnes til i det ovenstående.

¹Eksempelvis kunne en aftrapning af trend foregå ved at erstatte en estimeret lineær trend $f(f) = at$ med $g(t) = y_0 e^{\frac{a}{y_0} \frac{t}{t+c}}$, så trendkomponenten har en asymptote bestemt som c perioders lineær vækst.

3 Kombinet kalibrering og estimation af adfærdsparametre

Det er i visse situationer muligt at kombinere ovenstående idé med estimering af nogle af modellens adfærdsparametre, eksempelvis substitutionselasticiteterne i produktionsfunktionerne.

Lad os tage udgangspunkt i et forsimplet eksempel. Antag at produktionen i er sektor er givet ved CES-funktionen:

$$y_t = \left[\sum_j \mu_{jt}^{\frac{1}{E}} q_{jt}^{\frac{E-1}{E}} \right]^{\frac{E}{E-1}}. \quad (2)$$

Dette er måden hvorpå produktionsfunktioner typisk antages at se ud i MAKRO. Hvis man fx bedre kan lide en specifikation der indeholder et effektivitetsindeks e_{jt} :

$$y_t = \left[\sum_j \alpha_j (e_{jt} q_{jt})^{\frac{E-1}{E}} \right]^{\frac{E}{E-1}}, \quad e_{j0} = 1, \quad (3)$$

skal man blot omregne fx således:

$$e_{jt} = \left(\frac{\mu_{jt}}{\mu_{j0}} \right)^{\frac{1}{E-1}} \quad (4)$$

$$\alpha_j = \mu_{j0}^{\frac{1}{E}}$$

hvor $t = 0$ er et basis-år.

Ved estimation af produktionsfunktioner gøres der ofte en del antagelser om den tidsmæssige udviklingen i μ_{jt} eller e_{jt} (se f.eks. Thomsen [2015] og en række arbejds-papirer i ADAM-gruppen). Det kan f.eks. være ved at fitte den historiske udvikling i effektivitetsindekset til polynomier eller logistiske funktioner. Vi anvender en mere generel metode som via Kalman-filtrering *både* estimerer substitutionselasticiteterne samt giver et bud på den historiske udvikling i de uobserverede faktorspecifikke effektivitetsindeks. Vi har tidligere afprøvet nedenstående metode ved Monte Carlo-eksperimenter og fået gode resultater for så vidt angår estimation af elasticiteten for simuleret data med den relevante længde. Metoden ser ligeledes ud til at give fornuftige resultater i forhold til estimation af udenrigshandelselasticiteter.

Som et eksempel, betragt nu CES-efterspørgslen for en repræsentativ virksomhed, det tager alle faktorpriserne for givet:

$$q_{jt} = \mu_{jt} \left(\frac{p_t^q}{p_t} \right)^{-E} y_t \quad (5)$$

hvor q_{jt} , p_t^q , p_t og y_t er data. Dette er efterspørgselsfunktionen udledt givet produktionsfunktion (2). Fordelingsparameteren μ_{jt} afspejler forskydninger i faktornes relative effektivitet. Hertil kommer en nul-profit-betingelse $p_t y_t = \sum_j p_{jt}^q q_{jt}$, der er overholdt, hvis datasættet er konsistent.

Hvis vi definerer budgetandelen $s_{jt} = \frac{p_{jt}^q q_{jt}}{p_t y_t}$ kan (5) omskrives i forhold til budgetandele

$$s_{jt} = \mu_{jt} \left(\frac{p_{jt}^q}{p_t} \right)^{1-E} \quad (6)$$

Estimationen kan principielt anvendes på begge specifikationer, men (6) har den fordel i forhold til (5) at det er mindre sandsynligt, at der er (negativt) korrelerede målefejl på både højre- og venstresiden, hvilket giver vil give en bias i estimatet for E . Sammenhængen mellem data og den ukendte proces for μ_{jt} kan nu beskrives i følgende log-lineære observationsligning:

$$\log(s_{jt}) = \log(\mu_{jt}) + (1-E)\log\left(\frac{p_{jt}^q}{p_t}\right) + \varepsilon_t^s \quad (7)$$

Herudover er det nødvendigt med en ligning, der beskriver, hvordan den uobserverede variabel μ_{jt} udvikler sig. Det mest simple er at antage, at den følger en Random Walk:

$$\log(\mu_{jt}) = \log(\mu_{jt-1}) + \varepsilon_t^\mu \quad (8)$$

Tilsammen udgør (7) and (8) en state space repræsentation af en dynamisk lineær regressionsmodel, og dermed kan vi bruge Kalman-filtret til denne øvelse. Systemet kan let udvides, f.eks. til flere serier, hvor elasticiteten betinges til at være den samme. Bemærk (jf. ovenstående afsnit), at μ_t de facto kan betragtes som »data« for en given elasticitet. På den måde kan antagelserne om dynamikken efterprøves, når man har et estimat for E . Dette giver anledning til følgende øvelse, som vi har anvendt på branchespecifikt KELM-data for perioden 1967-2016 med udgangspunkt i ADAMs erhvervsstruktur: Først estimeres substitutionselasticiteten (f.eks. mellem kapital og arbejdskraft) med en »mu-antagelse« om en Random Walk som i (8). Dernæst fites den bedste ARIMA-model (baseret på informations-kriteriet og efter samme fremgangsmåde som i det ovenstående afsnit) til den resulterende serie. Hvis den bedste model er en Random Walk stoppes, hvis ikke så estimeres E i næste iteration, men hvor state-ligningen nu specificeres som den valgte ARIMA-model i stedet for (8). Denne iteration fortsættes indtil den antagede beskrivelse af μ_{jt} bekræftes efter estimationen. Vi finder, at denne iterative metode generelt forbedrer systemets fit til data, samt at modelspecifikationen »konvergerer« efter nogle få iterationer. Estimerne for elasticiteterne i ADAMs branchestruktur vises i Tabel 2 og 3 for henholdsvis KELM og KLEM neststruktur. Det ses, at elasticiteterne ligger relativt tæt op af dem i Thomsen [2015] (bemærk dog, at dette studie bruger data frem til 2013).

Tabel 2: KELM-estimationer for forskellige sektorer, 1967-2016, substitutionselasticiteter

Sektor	KE	KEL	KELM
Landbrug (a)	0,09	0,27	0,23
Næringsmidler (nf)	0,01	0,30	0,33
Fremstilling (nz)	0,13	0,45	0,53
Byggeri (b)	0,00	0,25	0,65
Privat service (qz)	0,12	0,05	0,63
Offentligt sektor (o)	0,42	0,05	1,07

Anm.: Estimerne er for den sidste iteration.

Tabel 3: KLEM-estimationer for forskellige sektorer, 1967-2016, substitutionselasticiteter

Sektor	KL	KLE	KLEM
Landbrug (a)	0,25	0,18	0,24
Næringsmidler (nf)	0,38	0,03	0,33
Fremstilling (nz)	0,44	0,15	0,55
Byggeri (b)	0,25	0,00	0,72
Privat service (qz)	0,44	0,04	0,64
Offentligt sektor (o)	0,02	0,48	1,08

Anm.: Estimerne er for den sidste iteration.

Data og iterative estimationer af KELM for nz sektor

Indre priser og mængder er lavet som kædeindeks:

$$P_t^{KE} = \frac{p_t^K K_t + p_t^E E_t}{p_{t-1}^K K_t + p_{t-1}^E E_t} P_{t-1}^{KE}$$

$$X_t^{KE} = \frac{p_{t-1}^K K_t + p_{t-1}^E E_t}{P_{t-1}^{KE}}$$

$$P_t^{KEL} = \frac{P_t^{KE} X_t^{KE} + w_t L_t}{P_{t-1}^{KE} X_t^{KE} + w_{t-1} L_t} P_{t-1}^{KEL}$$

$$X_t^{KEL} = \frac{P_{t-1}^{KE} X_t^{KE} + w_{t-1} L_t}{P_{t-1}^{KEL}}$$

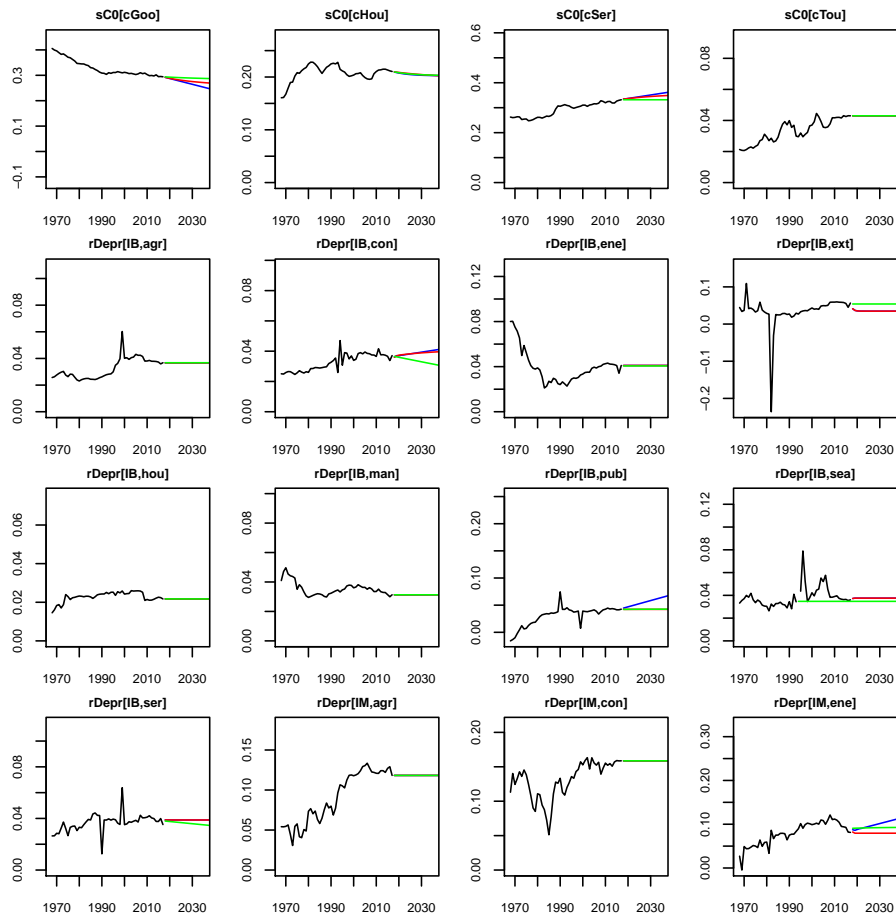
Tabel 4: Resultater i Thomsen [2015]

Sektor	KE	KEL	KELM
Landbrug (a)	0,16	0,32	0,28
Næringsmidler (nf)	0,11	0,08	0,56
Fremstilling (nz)	0,35	0,42	0,68
Byggeri (b)	0,13	1,00	0,83
	KL	KLE	KLEM
Privat service (qz)	0,61	0,19	0,67
Offentligt sektor (o)	0,57	0,34	1,20

Litteratur

- Danmarks Nationalbank. Mona - en kvartalsmodel af dansk økonomi. 2003.
- D. F. Hendry and M. P. Clements. Economic forecasting: some lessons from recent research. *Economic Modelling*, 2003.
- R. Hyndman. R vs autobox vs forecastpro vs ... *Blog post: <https://robjhyndman.com/hyndsight/show-me-the-evidence/>*, 2015.
- R. J. Hyndman and Y. Khandakar. Automatic time series forecasting: the forecast package for r. *Journal of Statistical Software*, 2008.
- A. Ø. Iversen, P. Stephensen, and J. Z. Hansen. Mismatch på det danske arbejdsmarked. *DREAM Rapport*, 2016.
- T. Thomsen. Klem-estimationer 1968-2013. *Danish Energy Agency Working Paper*, 2015.
- A. Timmermann. Forecast combinations. *Handbook of Economic Forecasting*, 2006.

Figur 1: Eksempler på dynamisk kalibrering



Anm.: Overskrifterne refererer til parametrene navne i MAKRO. Blå er ARIMA-fremskrivning, rød er en forsigtig fremskrivning af trend (se fodnote), mens grøn er en exponential smoothing.

Figur 2: Eksempler på dynamisk kalibrering, fortsat

